

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

COMPUTER SCIENCE, COMPUTER ENGINEERING AND CONTROL

УДК 330.4

doi: 10.21685/2072-3059-2024-4-1

Вложенные кусочно-линейные регрессионные модели с непрерывными компонентами

С. И. Носков¹, Е. С. Попов²

^{1,2}Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

¹sergey.noskov.57@mail.ru, ²eglr5732@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Предложен подход к повышению гибкости предложенных ранее одним из авторов вложенных кусочно-линейных регрессионных моделей за счет возможности включения в них непрерывных функций. Отмечено, что такое расширение класса вложенных конструкций является весьма актуальным, поскольку чем шире арсенал форм связи (типов аппроксимирующих функций) между независимыми переменными, который находится в распоряжении исследователя, тем более адекватную анализируемому объекту модель он в конечном счете построит. Указано, что в описанных моделях формализован лишь первый порядок вложенности, хотя он может быть также вторым, третьим и т.д. Кроме того, можно строить мультипликативные и аддитивные вложенные кусочно-линейные регрессионные модели первого и второго типов. *Результаты.* Показано, что при линейности непрерывных функций, входящих в состав вложенных кусочно-линейных регрессионных моделей, и использовании в качестве функции потерь суммы модулей разностей между расчетными и фактическими значениями зависимой переменной задача оценивания параметров моделей сводится к задаче линейного булева программирования, приемлемой для реальных ситуаций размерности. Для ее решения могут быть привлечены эффективные программные средства, например размещенная в сети Интернет в свободном доступе программа LPsolve. *Выводы.* Предложенный подход не только обеспечивает возможность расчета значений неизвестных параметров вложенных кусочно-линейных регрессионных моделей с непрерывными компонентами, но и позволяет выявить номера наблюдений, на которых сработали внешний и внутренние минимумы в моделях.

Ключевые слова: кусочно-линейная регрессия, непрерывные функции, простая и однородная вложенные кусочно-линейные регрессии, задача линейного булева программирования, функция потерь

Для цитирования: Носков С. И., Попов Е. С. Вложенные кусочно-линейные регрессионные модели с непрерывными компонентами // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2024. № 4. С. 5–15. doi: 10.21685/2072-3059-2024-4-1

Nested piecewise linear regression models with continuous components

S.I. Noskov¹, E.S. Popov²

^{1,2}Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

¹sergey.noskov.57@mail.ru, ²eglr5732@mail.ru

Abstract. *Background.* An approach is proposed to increase the flexibility of nested piecewise linear regression models proposed earlier by one of the authors due to the possibility of including continuous functions in them. It is noted that such an extension of the class of nested constructions is very relevant, since the wider the arsenal of forms of communication (types of approximating functions) between independent variables that is at the disposal of the researcher, the more adequate the analyzed object model he will eventually build. It is indicated that in the described models only the first nesting order is formalized, although it can also be the second, third, etc. In addition, multiplicative and additive nested piecewise linear regression models of the first and second types can be built. *Results.* It is shown that with the linearity of continuous functions included in embedded piecewise linear regression models and using as a loss function the sum of the modules of the differences between the calculated and actual values of the dependent variable, the problem of estimating model parameters is reduced to the problem of linear Boolean programming of a dimension acceptable for real situations. Effective software tools can be used to solve it, for example, the lpSolve program, which is freely available on the Internet. *Conclusions.* The proposed approach not only provides the possibility of calculating the values of unknown parameters of nested piecewise linear regression models with continuous components, but also allows us to identify the observation numbers on which the external and internal minima in the models worked.

Keywords: piecewise linear regression, continuous functions, simple and homogeneous nested piecewise linear regression, linear Boolean programming problem, loss function

For citation: Noskov S.I., Popov E.S. Nested piecewise linear regression models with continuous components. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskies nauki = University proceedings. Volga region. Engineering sciences.* 2024;(4):5–15. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3059-2024-4-1

Введение

При построении математических моделей регрессионного типа для анализа сложных систем различного характера и масштаба нередко возникает необходимость в использовании комбинированных модельных конструкций, вызванная, в частности, природой изучаемых процессов или особенностями обрабатываемой исходной информации. Это позволяет существенным образом повысить адекватность разрабатываемых моделей по сравнению с традиционными однородными формами. Так, в работе [1] предлагаются новые модели регрессии, полученные комбинацией методов наименьших квадратов, минимакса и наименьших модулей. Авторы работы [2] отмечают, что комбинация регрессионных моделей может быть привлекательна по нескольким причинам. Наиболее значимой причиной является то, что она обеспечивает повышение надежности и общей производительности регрессионной системы. Предлагаемый в статье метод сочетает в себе преимущества объединения регрессионных моделей и их динамического отбора, которые являются двумя основными категориями общего алгоритма объединения. Применяемые частные алгоритмы проходят испытания на небольшом подмножестве обучающего набора. В статье [3] при прогнозировании прочности высокоэффективного

бетона на сжатие применяется комбинация линейной регрессии, искусственных нейронных сетей и регрессии опорных векторов. В публикации [4] при исследовании оползней был проведен сравнительный анализ комбинированных двумерных моделей и логистических регрессий. Согласно результатам комбинированная двумерная модель и ее взвешенная модификация обеспечили несколько более высокую точность прогнозирования, чем модель логистической регрессии. В исследовании [5] предлагается новая модель логистической регрессии, основанная на взаимодополняемости и сочетании активного обучения и обучения с полуконтролем для использования немаркированных выборок с наименьшими затратами с целью повышения точности классификации заболеваний.

Статья [6] посвящена комбинированию пошаговой регрессии с многослойной нейронной сетью перцептрона для разработки модели загрязнителей воздуха. Она обладает отличными прогнозирующими эффектами как для обучающего, так и для тестового набора, что указывает на ее хорошую способность к обобщению. Эта модель играет положительную роль в создании и продвижении миниатюрных детекторов качества воздуха, которые можно применять не только для его мониторинга, но и для анализа других показателей окружающей среды. В работе [7] представлен подробный сравнительный анализ возможностей адаптивного обучения различных ключевых регрессионных моделей на основе машинного обучения для экстраполяционного анализа данных о пропускной способности, полученных на различных расстояниях связи пользователя с передатчиком gNodeB в новых радиосетях 5G. Кроме того, предлагается модель машинного обучения на основе случайного леса в сочетании с алгоритмом наименьших квадратов и методом настройки байесовских гиперпараметров для дальнейшего экстраполяционного анализа полученных данных. Исследование [8] посвящено разработке нового алгоритма объединения моделей для классификации в исследованиях биомаркеров. Он рассматривает взвешенные комбинации различных моделей логистической регрессии. Описываются пять различных схем взвешивания; веса и алгоритм обоснованы с использованием теории принятия решений и результатов, связанных с риском. Моделирование проводится для оценки свойств предлагаемого метода объединения моделей на конечной выборке.

Интересные результаты по комбинированию регрессионных моделей представлены в работах [9] (комбинированные регрессионные модели для описания данных, представленных в разных шкалах), [10] (комбинированные многофакторные модели, включающие временной тренд и дамми-переменные), [11] (сочетание нечеткой и классической регрессий), [12] (комбинированный метод применения искусственной нейронной сети и регрессионного анализа для определения пиковой скорости пород на руднике), [13] (трендовые модели с сезонной составляющей, адаптивные модели и комбинированная модель для получения долгосрочных, среднесрочных и краткосрочных прогнозов энергопотребления).

Включение непрерывных составляющих во вложенные кусочно-линейные регрессионные модели

Пусть при исследовании рассматриваемой сложной системы на выходной фактор (зависимую переменную) y оказывают влияние входные факторы

(независимые переменные, предикторы) $x_1, x_2, \dots, x_m$, т.е. исходить из наличия регрессионной связи:

$$y_k = F(a; x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km}) + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, n},$$

где k – номер наблюдения; n – количество наблюдений (длина выборки данных); F – аппроксимирующая вещественная функция; a – вектор параметров; ε – ошибки аппроксимации.

При этом будем предполагать отсутствие какой-либо информации о вероятностной природе данных, как это и принято в рамках логико-алгебраического (аппроксимационного) подхода к анализу данных. Без потери общности будем предполагать также неотрицательность значений зависимой переменной.

Очевидно, что чем шире арсенал форм связи (типов функции F) между переменными, который находится в распоряжении исследователя, тем более адекватную анализируемому объекту модель он в конечном счете построит.

В работах [14, 15] авторами предложены обобщающие известные регрессионные кусочно-линейные модели, функции Леонтьева [16] и функции риска [17]. Различные формы вложенной регрессии:

– простая вложенная кусочно-линейная регрессия первого типа:

$$y_k = \min \{ \min_{i \in I} \{ \alpha_i x_{ki} \}, \max_{i \in J} \{ \beta_i x_{ki} \} \} + \varepsilon_k; \quad (1)$$

– простая вложенная кусочно-линейная регрессия второго типа:

$$y_k = \max \{ \min_{i \in I} \{ \alpha_i x_{ki} \}, \max_{i \in J} \{ \beta_i x_{ki} \} \} + \varepsilon_k; \quad (2)$$

– однородная вложенная кусочно-линейная регрессия первого типа:

$$y_k = \min \{ \min_{i \in I^1} \{ a_i^1 x_{ki} \}, \dots, \min_{i \in I^G} \{ a_i^G x_{ki} \} \} + \varepsilon_k; \quad (3)$$

– однородная вложенная кусочно-линейная регрессия второго типа:

$$y_k = \max \{ \max_{i \in J^1} \{ \beta_i^1 x_{ki} \}, \dots, \max_{i \in J^H} \{ \beta_i^H x_{ki} \} \} + \varepsilon_k. \quad (4)$$

Здесь индексные множества I^i , $i = \overline{1, G}$, и J^i , $i = \overline{1, H}$, являются подмножествами множества номеров независимых переменных $\{1, 2, \dots, m\}$ и могут иметь всевозможные непустые попарные пересечения:

$$I, J, I^i \subseteq \{1, 2, \dots, m\}, \quad i = \overline{1, G}, \quad J^i \subseteq \{1, 2, \dots, m\}, \quad i = \overline{1, H}.$$

В исследованиях [14, 15] отмечается, что нетрудно предусмотреть и другие частные варианты вложенных кусочно-линейных конструкций (1)–(4). По существу, в них формализован лишь первый порядок вложенности, хотя он может быть также вторым, третьим и т.д. Кроме того, можно построить мультипликативные и аддитивные вложенные кусочно-линейные регрессионные модели первого и второго типов.

Вложенные регрессии (1)–(4) содержат только кусочно-линейные компоненты. Предусмотрим расширение класса этих моделей, сделав его более

гибким за счет возможности включения в регрессии непрерывных дискретных функций $f^{K_j}(\cdot)$, $j = \overline{1, L}$. В результате получим следующие вложенные кусочно-линейные регрессионные модели с непрерывными компонентами:

– простая вложенная кусочно-линейная регрессия с непрерывными компонентами первого типа:

$$y_k = \min \left\{ f^{K^1}(x_{ki}), \dots, f^{K^L}(x_{ki}), \min_{i \in I} \{\alpha_i x_{ki}\}, \max_{i \in J} \{\beta_i x_{ki}\} \right\} + \varepsilon_k; \quad (5)$$

– простая вложенная кусочно-линейная регрессия с непрерывными компонентами второго типа:

$$y_k = \max \left\{ f^{K^1}(x_{ki}), \dots, f^{K^L}(x_{ki}), \min_{i \in I} \{\alpha_i x_{ki}\}, \max_{i \in J} \{\beta_i x_{ki}\} \right\} + \varepsilon_k; \quad (6)$$

– однородная вложенная кусочно-линейная регрессия с непрерывными компонентами первого типа:

$$y_k = \min \left\{ f^{K^1}(x_{ki}), \dots, f^{K^L}(x_{ki}), \min_{i \in I^1} \{a_i^1 x_{ki}\}, \dots, \min_{i \in I^G} \{a_i^G x_{ki}\} \right\} + \varepsilon_k; \quad (7)$$

– однородная вложенная кусочно-линейная регрессия с непрерывными компонентами второго типа:

$$y_k = \max \left\{ f^{K^1}(x_{ki}), \dots, f^{K^L}(x_{ki}), \max_{i \in J^1} \{\beta_i^1 x_{ki}\}, \dots, \max_{i \in J^H} \{\beta_i^H x_{ki}\} \right\} + \varepsilon_k. \quad (8)$$

Здесь $f^{K_j}(x_i)$ – непрерывные вещественные функции с аргументами x_i , $i \in K_j$, $j = \overline{1, L}$.

В случаях, когда оценивание неизвестных параметров вложенных кусочно-линейных регрессий (1)–(4) производится в соответствии с методом наименьших модулей, т.е. путем минимизации функций потерь

$$\sum_{k=1}^n |\varepsilon_k| \rightarrow \min, \quad (9)$$

соответствующей городскому расстоянию между реальными и вычисленными по модели векторами значений зависимой переменной, задачи (9) могут быть сведены к задачам линейного булева программирования (ЛБП) (см., например, [18]).

Оказывается, если функции $f^{K_j}(x_i)$, $j = \overline{1, L}$ линейны, задачи (9) для вложенных кусочно-линейных регрессионных моделей с непрерывными компонентами также могут быть сведены к задачам ЛБП.

Действительно, рассмотрим однородную вложенную кусочно-линейную регрессию с непрерывными компонентами первого типа (7), в которой $L = G = 1$, а функция $f^{K^1}(x_{ki})$ линейна:

$$y_k = \min \left\{ \sum_{i \in K^1} \alpha_i x_{ki}, \min_{i \in I^1} \{\beta_i x_{ki}\} \right\} + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Заметим, что в работе [19] рассмотрена простая вложенная кусочно-линейная регрессия с линейной составляющей вне вложенной части.

Для оценивания параметров α_i , $i \in K^1$, β_i в (10) воспользуемся вычислительным приемом, примененным в работах [18–20].

Введем следующие обозначения:

$$h_k = \min_{i \in I^1} \{\beta_i x_{ki}\}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$t_k = \min(\sum_{i \in K^1} \alpha_i x_{ki}, h_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

Тогда задача ЛБП, эквивалентная задаче (9) для регрессии (10), примет следующий вид:

$$h_k \leq \beta_i x_{ki}, \quad k = \overline{1, n}, \quad i \in I^1, \quad (11)$$

$$\beta_i x_{ki} - h_k \leq (1 - s_{ki}) M_1, \quad k = \overline{1, n}, \quad i \in I^1, \quad (12)$$

$$\sum_{i \in I^1} s_{ki} = 1, \quad k = \overline{1, n}, \quad (13)$$

$$t_k \leq h_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (14)$$

$$t_k \leq \sum_{i \in K^1} \alpha_i x_{ki}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (15)$$

$$h_k - t_k + M_2 r_k \leq M_2, \quad k = \overline{1, n}, \quad (16)$$

$$\sum_{i \in K^1} \alpha_i x_{ki} - t_k - M_2 r_k \leq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$t_k + u_k - v_k = y_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (18)$$

$$u_k \geq 0, v_k \geq 0, h_k \geq 0, t_k \geq 0, k = \overline{1, n}, \quad (19)$$

$$s_{ki} \in \{0, 1\}, \quad k = \overline{1, n}, \quad i \in I^1, \quad (20)$$

$$r_k \in \{0, 1\}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (21)$$

$$\beta_i \geq 0, \quad i \in I^1, \quad (22)$$

$$\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) \rightarrow \min. \quad (23)$$

Здесь M_1 и M_2 – наперед заданные большие положительные числа.

Задача ЛБП (11)–(23) имеет $|I^1| + |K^1| + n|I^1| + 5n$ переменных, из которых $n|I^1| + n$ булевы, и $2n|I^1| + 6n$ ограничений без условий неотрицательности (символами $|I|$ и $|K|$ обозначена мощность множеств I и K соответственно). Для ее решения могут быть привлечены эффективные программные средства, например размещенная в сети Интернет в свободном доступе программа LPsolve.

Для пояснения работы представленного выше алгоритма рассмотрим небольшой иллюстративный пример со сформированными с помощью датчика случайных чисел исходными данными. Пусть при $n=6$ и $m=5$ задана выборка данных:

$$X = \begin{pmatrix} 62824 \\ 79448 \\ 62996 \\ 48623 \\ 32846 \\ 14916 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Сформируем индексные множества:

$$K^1 = \{1, 2, 3\}, I^1 = \{4, 5\}.$$

После решения задачи ЛБП (11)–(23) получим следующие значения неизвестных переменных:

$$\alpha = (-0,215, 0,795, 0,337), \beta = (6, 1,667),$$

$$S = \begin{pmatrix} 01 \\ 01 \\ 01 \\ 01 \\ 01 \\ 10 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3,552 \\ 5 \\ 3,643 \\ 6 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 6,667 \\ 13,333 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,448 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,643 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, однородная вложенная кусочно-линейная регрессия с непрерывными компонентами линейного типа (10) примет вид

$$y_k = \min\{-0,215x_{k1} + 0,795x_{k2} + 0,337x_{k3}, \min\{6x_{k4}, 1,667x_{k5}\}\} + \varepsilon_k, k = \overline{1,6}. \quad (24)$$

При этом сумма модулей ошибок аппроксимации составила $\sum_{k=1}^6 (u_k + v_k) = 5,091$, внешний минимум в регрессии (24) сработал в первом, втором, третьем и пятом наблюдениях на линейной части, а в четвертом и шестом – на кусочно-линейной.

Заключение

В опубликованных ранее одним из авторов работах описаны вложенные кусочно-линейные регрессионные модели: простая и однородная первого и второго типов. В настоящей статье представлены их более гибкие модификации, полученные за счет возможности включения в модели непрерывных функций. Показано, что при их линейности и использовании в качестве функции потерь суммы модулей ошибок аппроксимации задача оценивания параметров моделей сводится к задаче линейного булева программирования. Решен иллюстративный пример.

Список литературы

1. Castillo E., Castillo C., Hadi A. S., Sarabia J. M. Combined regression models // *Computational Statistics*. 2009. Vol. 24. P. 37–66.
2. Kotsiantis S. B., Pintelas P. E. Selective Averaging of Regression Models // *Annals of mathematics, computing and teleinformatics*. 2005. Vol. 1, № 3. P. 65–74.
3. Chou Jui-Sheng, Tsai Chih-Fong. Concrete compressive strength analysis using a combined classification and regression technique // *Automation in Construction*. 2012. Vol. 24. P. 52–60.
4. Sangchini E. K., Emami S. N., Tahmasebipour N., Pourghasemi H. R., Naghibi S. A., Arami S. A., Pradhan B. Assessment and comparison of combined bivariate and AHP models with logistic regression for landslide susceptibility mapping in the Chaharmahal-e-Bakhtiari Province, Iran // *Arabian Journal of Geosciences*. 2016. Vol. 9, № 201. doi: 10.1007/s12517-015-2258-9
5. Chai H., Liang Y., Wang S., Shen H.-W. A novel logistic regression model combining semi-supervised learning and active learning for disease classification // *Scientific Reports*. 2018. Vol. 8 (1). P. 13009.
6. Liu B., Zhao Q., Jin Y., Shen J., Li Ch. Application of combined model of stepwise regression analysis and artificial neural network in data calibration of miniature air quality detector // *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11 (1). P. 3247.
7. Isabona J., Imoize A. L., Kim Y. Machine Learning-Based Boosted Regression Ensemble Combined with Hyperparameter Tuning for Optimal Adaptive Learning // *Sensors (Basel)*. 2022. Vol. 22 (10). P. 3776.
8. Yuan Z., Ghosh D. Combining Multiple Biomarker Models in Logistic Regression // *Biometrics*. 2008. Vol. 64 (2). P. 431–439.
9. Лисицын Д. В. Комбинированные регрессионные модели для описания данных, представленных в разных шкалах // *Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета*. 2013. № 3 (73). С. 41–48.
10. Шихин В. А., Шихина А. В. Автоматизированный прогноз цены электроэнергии по комбинированным моделям // *Автоматизация в промышленности*. 2021. № 11. С. 33–38.
11. Домрачев В. Г., Полещук О. М. О построении регрессионной модели при нечетких исходных данных // *Автоматика и телемеханика*. 2003. № 11. С. 74–83.
12. Радисавлевич Й. Применение искусственных нейронных сетей для прогнозирования интенсивности сейсмических колебаний пород на медном руднике «Велики Кривель» // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. 2023. № 2. С. 34–47.
13. Карпенко С. М., Карпенко Н. В. Анализ динамики и прогнозирование электропотребления на основе эконометрического моделирования // *Энергобезопасность и энергосбережение*. 2020. № 2. С. 20–25.
14. Носков С. И. Подход к формализации вложенной кусочно-линейной регрессии // *Международный журнал гуманитарных и естественных наук*. 2023. № 1-2 (76). С. 218–220.

15. Носков С. И. Некоторые формы вложенной кусочно-линейной регрессии // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. № 3. С. 467–469.
16. Носков С. И., Попов Е. С. Подход к построению функции Леонтьева с нелинейными предикторами // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2024. № 2. С. 105–108.
17. Носков С. И. Регрессионная функция риска для объема погрузки грузов на восточно-сибирской железной дороге // Вестник СамГУПС. 2023. № 3 (61). С. 98–101.
18. Носков С. И., Белинская С. И. Вычисление оценок параметров однородной вложенной кусочно-линейной регрессии // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2023. Т. 50, № 4. С. 115–120.
19. Носков С. И. Оценивание параметров простой вложенной кусочно-линейной регрессии с линейной составляющей // Вестник Югорского государственного университета. 2024. Т. 20, № 1. С. 19–21.
20. Носков С. И. Идентификация параметров простой формы вложенной кусочно-линейной регрессии // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2023. № 3 (67). С. 57–61.

References

1. Castillo E., Castillo C., Hadi A.S., Sarabia J.M. Combined regression models. *Computational Statistics*. 2009;24:37–66.
2. Kotsiantis S.B., Pintelas P.E. Selective Averaging of Regression Models. *Annals of mathematics, computing and teleinformatics*. 2005;1(3):65–74.
3. Chou Jui-Sheng, Tsai Chih-Fong. Concrete compressive strength analysis using a combined classification and regression technique. *Automation in Construction*. 2012;24: 52–60.
4. Sangchini E.K., Emami S.N., Tahmasebipour N., Pourghasemi H.R., Naghibi S.A., Arami S.A., Pradhan B. Assessment and comparison of combined bivariate and AHP models with logistic regression for landslide susceptibility mapping in the Chaharmahal-e-Bakhtiari Province, Iran. *Arabian Journal of Geosciences*. 2016;9(201). doi: 10.1007/s12517-015-2258-9
5. Chai H., Liang Y., Wang S., Shen H.-W. A novel logistic regression model combining semi-supervised learning and active learning for disease classification. *Scientific Reports*. 2018;8(1):13009.
6. Liu B., Zhao Q., Jin Y., Shen J., Li Ch. Application of combined model of stepwise regression analysis and artificial neural network in data calibration of miniature air quality detector. *Scientific Reports*. 2021;11(1):3247.
7. Isabona J., Imoize A.L., Kim Y. Machine Learning-Based Boosted Regression Ensemble Combined with Hyperparameter Tuning for Optimal Adaptive Learning. *Sensors (Basel)*. 2022;22(10):3776.
8. Yuan Z., Ghosh D. Combining Multiple Biomarker Models in Logistic Regression. *Biometrics*. 2008;64(2):431–439.
9. Lisitsyn D.V. Combined regression models for describing data presented in different scales. *Sbornik nauchnykh trudov Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Proceedings of Novosibirsk State Technical University*. 2013;(3):41–48. (In Russ.)
10. Shikhin V.A., Shikhina A.V. Automated forecast of electricity prices using combined models. *Avtomatizatsiya v promyshlennosti = Automation in industry*. 2021;(11):33–38. (In Russ.)
11. Domrachev V.G., Poleshchuk O.M. On the construction of a regression model with fuzzy initial data. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and telemechanics*. 2003;(11):74–83. (In Russ.)

12. Radisavlevich Y. Application of Artificial Neural Networks to Predict Seismic Rock Fluctuation Intensity in a Copper Mine “Velikiy Krivel”. *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh = Physical and technical problems of mineral development*. 2023;(2):34–47. (In Russ.)
13. Karpenko S.M., Karpenko N.V. Analysis of dynamics and forecasting of electricity consumption based on econometric modeling. *Energobezopasnost' i energosberezhenie = Energy security and energy saving*. 2020;(2):20–25. (In Russ.)
14. Noskov S.I. An approach to formalizing nested piecewise linear regression. *Mezhdunarodnyy zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk = International Journal of Humanities and Natural Sciences*. 2023;(1-2):218–220. (In Russ.)
15. Noskov S.I. Some forms of nested piecewise linear regression. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki = Proceedings of the Tula State University. Engineering sciences*. 2023;(3):467–469. (In Russ.)
16. Noskov S.I., Popov E.S. An approach to constructing the Leontief function with nonlinear predictors. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki = Proceedings of the Tula State University. Engineering sciences*. 2024;(2):105–108. (In Russ.)
17. Noskov S.I. Regression risk function for the volume of cargo loading on the East Siberian Railway. *Vestnik SamGUPS = Bulletin of Samara State University of Railway Engineering*. 2023;(3):98–101. (In Russ.)
18. Noskov S.I., Belinskaya S.I. Calculating parameter estimates for homogeneous nested piecewise linear regression. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki = Bulletin of the Dagestan State Technical University. Engineering sciences*. 2023;50(4):115–120. (In Russ.)
19. Noskov S.I. Estimating parameters of simple nested piecewise linear regression with a linear component. *Vestnik Yugorskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Yugra State University*. 2024;20(1):19–21. (In Russ.)
20. Noskov S.I. Identification of parameters of a simple form of nested piecewise linear regression. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Proceedings of Komsomolsk-on-Amur State Technical University*. 2023;(3):57–61. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Сергей Иванович Носков

доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры информационных
систем и защиты информации,
Иркутский государственный университет
путей сообщения (Россия, г. Иркутск,
ул. Чернышевского, 15)

E-mail: sergey.noskov.57@mail.ru

Sergey I. Noskov

Doctor of engineering sciences, professor,
professor of the sub-department
of information systems and information
security, Irkutsk State Transport
University (15 Chernyshevskogo street,
Irkutsk, Russia)

Егор Сергеевич Попов

заведующий лабораторией кафедры
информационных систем и защиты
информации, Иркутский
государственный университет
путей сообщения (Россия, г. Иркутск,
ул. Чернышевского, 15)

E-mail: eglir5732@mail.ru

Egor S. Popov

Head of the laboratory of the sub-
department of information systems
and information security, Irkutsk State
Transport University (15 Chernyshevskogo
street, Irkutsk, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 10.06.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 24.08.2024

Принята к публикации / Accepted 09.09.2024